

QUESTÃO 4

4. Considere as funções $f(x) = x^2 + x + c$ e $g(x) = x + k$, onde c, k são números reais.

- a) Determine os valores de k e c para que se tenha $f(g(1)) - g(f(1)) < 0$.
- b) Sabendo que a equação $f(x) = 0$ tem uma única solução real, determine o(s) valor(es) de k para que a soma das soluções da equação $f(g^{-1}(x)) = 1/4$ seja igual a 2025, onde $g^{-1}(x)$ denota a função inversa de $g(x)$.

RESOLUÇÃO

a) Dado que $f(x) = x^2 + x + c$ e $g(x) = x + k$, temos:

$$f(g(1)) = f(k + 1) = (k + 1)^2 + (k + 1) + c = k^2 + 3k + (c + 2)$$

$$g(f(1)) = g(1^2 + 1 + c) = g(c + 2) = k + c + 2$$

Portanto:

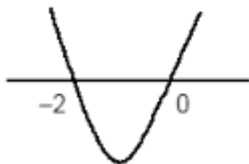
$$f(g(1)) - g(f(1)) < 0 \rightarrow$$

$$k^2 + 3k + c + 2 - k - c - 2 < 0$$

$$k^2 + 2k < 0$$

Resolvendo a inequação, temos:

$$k^2 + 2k = 0 \rightarrow k(k + 2) = 0 \rightarrow k = 0 \text{ e } k = -2$$



Assim, para $k^2 + 2k < 0$, temos que $-2 < 0 < k$ e $c \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 0 \rightarrow x^2 + x + c = 0$

Por se tratar de uma função quadrática, para haver uma única solução real, temos que

$\Delta = 0$. Então:

$$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \rightarrow$$

$$1 - 4c = 0 \rightarrow$$

$$c = \frac{1}{4}$$

Portanto $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

Como $g(x) = x + k$, sua inversa será:

$$x = y + k \rightarrow$$

$$y = x - k \rightarrow$$

$$g^{-1}(x) = x - k$$

Assim,

$$f(g^{-1}(x)) = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$f(x - k) = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$(x - k)^2 + (x - k) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$x^2 - 2kx + k^2 + x - k = 0 \rightarrow$$

$$x^2 + (1 - 2k)x + (k^2 - k) = 0$$

Para a soma das raízes ser igual a 2025, temos:

$$-\frac{(1-2k)}{1} = 2025 \rightarrow$$

$$2k - 1 = 2025 \rightarrow$$

$$k = 1013$$