

Questão 11

11. Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 2,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

- a) Determine todos os valores de a e b para os quais $A^T A = A A^T$, em que A^T é a transposta da matriz A .
- b) Para $a = b = 2$, sejam k e θ números reais tais que

$$A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Determine os possíveis valores de $\tan \theta$.

RESPOSTA

a) $A^T \cdot A = A \cdot A^T$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1+a^2 & 1+ab \\ 1+ab & 1+b^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{bmatrix} \\ 1+a^2 &= 2 \\ a^2 &= 1 \\ a &= \pm 1 \end{aligned}$$

Para $a = 1$:

$$1 + ab = a + b$$

$$1 + 1 \cdot b = 1 + b$$

$$1 + b = 1 + b$$

Para qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

Para $a = -1$:

$$1 + ab = a + b$$

$$1 - b = -1 + b$$

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

Resposta: $a = 1$ e $\forall b \in \mathbb{R}$ ou

$$a = -1 \text{ e } b = 1$$

b) $a = b = 2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} &= k \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos \theta + \sin \theta \\ 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k \cdot \cos \theta \\ k \cdot \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta + \sin \theta &= k \cdot \cos \theta \\ -\cos \theta + k \cdot \cos \theta &= \sin \theta \\ \frac{\cos \theta (k-1)}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ k-1 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \operatorname{tg} \theta &= k-1 \end{aligned}$$

e

$$2 \cos \theta + 2 \sin \theta = k \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 2 \cos \theta &= k \cdot \sin \theta - 2 \sin \theta \\
 \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta (k - 2)}{\cos \theta} \\
 2 &= \operatorname{tg} \theta (k - 2) \\
 \operatorname{tg} \theta &= \frac{2}{k - 2} \\
 k &\neq 2
 \end{aligned}$$

Desta forma,

$$k - 1 = \frac{2}{k - 2} \Leftrightarrow (k - 1)(k - 2) = 2 \Leftrightarrow k^2 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 3$$

Para $k = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = -1$

ou

Para $k = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 2$

Resposta: $\operatorname{tg} \theta = -1$ ou $\operatorname{tg} \theta = 2$.