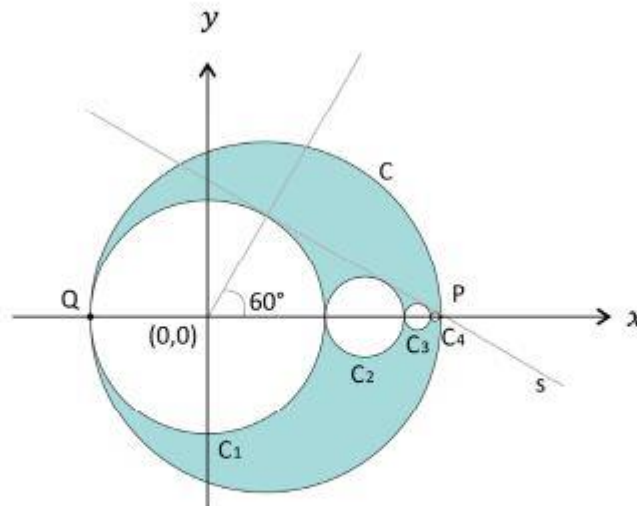


Questão 04

Considere as circunferências $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ e a reta s satisfazendo as seguintes propriedades:



- A circunferência C_1 tem centro $(0,0)$ e raio $r = 4$. Os centros das demais circunferências pertencem ao eixo Ox .
- A circunferência C_2 é tangente a C_1 e a C_3 , a circunferência C_3 é tangente a C_2 e a C_4 , e assim por diante.
- A reta s é tangente a cada circunferência C_n para $n \geq 1$.
- O segmento que liga o centro de C_1 ao ponto em que s tangencia C_1 forma um ângulo de 60° com o eixo Ox .
- A circunferência C é tangente a C_1 no ponto $Q = (-4,0)$ e passa pelo ponto $P = (x_0, 0)$.

Com base nessas informações,

- determine o raio da circunferência C .
- dado $n \geq 1$, determine a razão entre os raios das circunferências consecutivas C_{n+1} e C_n .
- determine a área da região sombreada na figura.

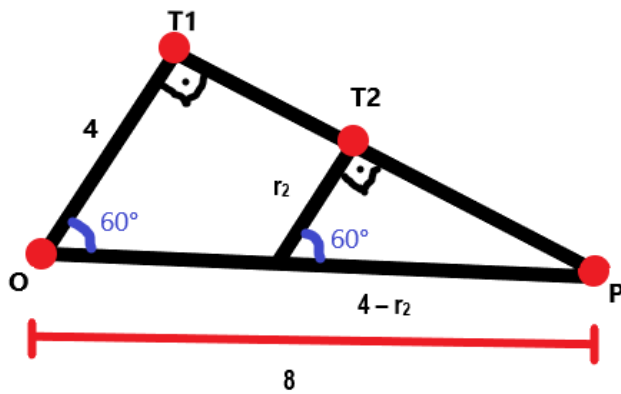
RESOLUÇÃO

- Sendo r a reta que passa pelo centro de C_1 e o ponto de tangência de C_1 e s , sabemos que $r \perp s$.

$$\text{Logo } \cos 60^\circ = \frac{r}{x_0} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x_0} \Rightarrow x_0 = 8.$$

$$\text{Assim, o raio } R \text{ de } C \text{ será } R = \frac{8+4}{2} \Rightarrow R = 6.$$

- Seja r_2 o raio de C_2 . Assim,



$$\frac{1}{2} = \frac{r_2}{4 - r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{4}{3}$$

Seja r_3 o raio de C_3 . Analogamente,

$$\frac{1}{2} = \frac{r_3}{\frac{4}{3} - r_3} \Rightarrow \frac{4}{3} - r_3 = 2r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{4}{9}$$

Assim, $\left(4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots\right)$ é uma PG de razão $1/3$, logo $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{3}$.

c) A área da região sombreada é $S = S_C - S_{C_1} - S_{C_2} - \dots - S_{C_n} - \dots$, onde

$$S_C = \pi \cdot 6^2 = 36\pi,$$

$$S_{C_1} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi,$$

$$S_{C_2} = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16\pi}{9},$$

$$S_{C_3} = \pi \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16\pi}{81}.$$

Note que $(S_{C_1}; S_{C_2}; S_{C_3}; \dots) = \left(16\pi; \frac{16\pi}{9}; \frac{16\pi}{81}, \dots\right)$ é uma PG de razão $1/9$, portanto

$$S_\infty = \frac{16\pi}{1 - \frac{1}{9}} = 16\pi \cdot \frac{9}{8} = 18\pi.$$

Assim, $S = 36\pi - 18\pi = 18\pi$.