

M06

M06

Em matemática, define-se o *piso* de um número real x como sendo o maior número inteiro menor ou igual a x . O símbolo para o piso de x é $\lfloor x \rfloor$. Por exemplo: $\lfloor 0,8 \rfloor = 0$; $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$; $\lfloor 10 \rfloor = 10$; $\lfloor -3,4 \rfloor = -4$.

- a) Determine x tal que $x\lfloor x \rfloor = 10$.
 b) Determine todas as soluções reais da equação $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 7$.
 c) Determine todas as soluções reais da equação $\lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 = 0$.

RESOLUÇÃO

a) Sabe-se que $\sqrt{10} \cong 3,16$.

Analisando os possíveis intervalos, tem-se:

- (I) $2 \leq x < 3$: $\lfloor x \rfloor = 2$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = 5$ (falso)
 (II) $3 \leq x < 4$: $\lfloor x \rfloor = 3$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$ (verdadeiro)
 (III) $4 \leq x < 5$: $\lfloor x \rfloor = 4$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = \frac{10}{4}$ (falso)
 (IV) $-3 \leq x < -2$: $\lfloor x \rfloor = -3$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = -\frac{10}{3}$ (falso)
 (V) $-2 \leq x < -1$: $\lfloor x \rfloor = -2$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = -5$ (falso)
 (VI) $-4 \leq x < -3$: $\lfloor x \rfloor = -4$ e $x\lfloor x \rfloor = 10 \rightarrow x = -\frac{10}{4}$ (falso)
 $\therefore x = \frac{10}{3}$

b)

(1) Se $x < 0$, então $\lfloor x \rfloor$ e $\lfloor 2x \rfloor$ são negativos. Logo $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 7$ não tem solução.

(2) Se $x = 0$, então $\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor = 0$. Logo $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 0$.

(3) Se $x > 0$, então $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 7$:

$$\lfloor x \rfloor = a$$

$$\lfloor 2x \rfloor = b, \text{ com } b > a.$$

$a + b = 7$	
a	b
0	7
1	6
2	5
3	4

a	b	$\lfloor x \rfloor$	x	2x	$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor$
0	7	0	$0 \leq x < 1$	$0 \leq 2x < 2$	≤ 3 (F)
1	6	1	$1 \leq x < 2$	$2 \leq 2x < 4$	≤ 6 (F)
2	5	2	$2 \leq x < 3$	$6 \leq 2x < 8$	Análise
3	4	3	$3 \leq x < 4$	$6 \leq 2x < 8$	≥ 9 (F)

(1) Se $2 \leq x < 2,5$:

$$\lfloor x \rfloor = 2 \text{ e } \lfloor 2x \rfloor = 4 \rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6$$

(2) Se $2,5 \leq x < 3$:

$$\lfloor x \rfloor = 2 \text{ e } \lfloor 2x \rfloor = 5 \rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 7$$

$$\therefore S = \{x \in \mathbb{R} / 2,5 \leq x < 3\}$$

c)

(1) Se x pertencer aos inteiros positivos, $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$

$$\lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \text{ ou } \lfloor x \rfloor = 3$$

Logo, $x = 1$ ou $x = 3$

(2) Se x pertencer aos inteiros negativos,

$$\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$$

$$\lfloor x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$$

Logo,

$$\lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 > 0, \text{ assim não há solução}$$

(3) Se x for um número real não-inteiro,

$$(i) \ x < 0 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 > 0.$$

$$(ii) \ x > \sqrt{10} : \lfloor x \rfloor \geq 3 \text{ e } \lfloor x^2 \rfloor \geq 10 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 \neq 0$$

$$(iii) \text{ Tomando todo } x \text{ tal que } \begin{aligned} \lfloor x \rfloor = 1 \text{ e } \lfloor x^2 \rfloor = 1 &\Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \\ \lfloor x \rfloor = 3 \text{ e } \lfloor x^2 \rfloor = 9 &\Rightarrow 3 \leq x < \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\text{Além, } \begin{aligned} \lfloor x \rfloor = 2 &\Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ \lfloor x^2 \rfloor = 5 &\Rightarrow 5 \leq x^2 < 6 \Rightarrow \sqrt{5} \leq x < \sqrt{6} \end{aligned}$$