

M03

M03

Considere a parábola P dada pela equação $y = x^2$ e a reta r dada pela equação $ax + by + c = 0$, onde a, b , e c são constantes reais. Denote por $O = (0,0)$ a origem do sistema de coordenadas cartesiano Oxy .

- Se $a = 2, b = -1$ e $c = 3$, determine todos os pontos do plano cartesiano que pertencem, simultaneamente, à reta r e à parábola P .
- Se $a = 4, b = 3$ e $c = -7$, determine o ponto da reta r que está mais próximo de O .
- Considere três pontos A, B e C na parábola P , tais que $A = (-1,1)$, B pertence ao primeiro quadrante e os segmentos AB e OC são paralelos. Determine B e C de forma que a distância de B até C seja $\sqrt{17}$.

RESOLUÇÃO

Parábola $P: y = x^2$

Reta $r: ax + by + c = 0$

$$\text{a) } \begin{cases} r: 2x - y + 3 = 0 \\ P: y = x^2 \end{cases}$$

Por substituição, temos:

$$2x - x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Agora, por soma e produto, temos

$$S = 2 \text{ e } P = -3 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -1.$$

Assim;

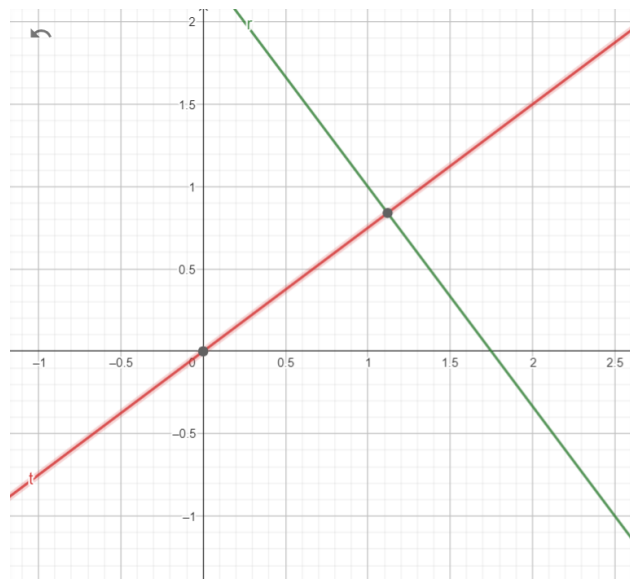
$$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 3^2 \rightarrow y_1 = 9$$

$$x_2 = -1 \rightarrow y_2 = (-1)^2 \rightarrow y_2 = 1$$

Pontos que pertencem à reta r e a parábola p são:

$$(3, 9) \text{ e } (-1, 1)$$

b) Reta $r: 4x + 3y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{4}{3}$



Reta r : Verde e Reta t : Vermelho

t é perpendicular a $r \Rightarrow m_t \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_t \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \Rightarrow m_t = \frac{3}{4}$

Equação da reta $t \begin{cases} (0, 0) \\ m_t = \frac{3}{4} \end{cases}$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

Substituindo (t) em (r), temos:

$$4x + 3 \cdot \frac{3}{4}x - 7 = 0$$

$$4x + \frac{9}{4}x = 7 \quad (\times 4)$$

$$16x + 9x = 28$$

$$x = \frac{28}{25}$$

Substituindo este valor na reta t :

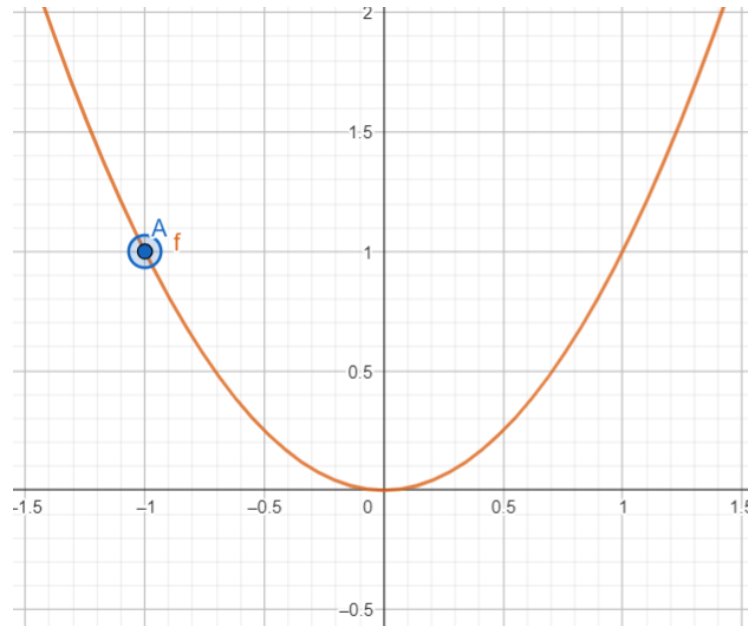
$$y = \frac{3}{4}x$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{28}{25} \Rightarrow y = \frac{21}{25}$$

Portanto, o ponto de r que está mais próximo da origem é $\left(\frac{28}{25}, \frac{21}{25}\right)$.

c)

$P: y = x^2$



$$B \in 1^{\circ} Q \Rightarrow (2, \beta); \alpha \text{ e } \beta \geq 0$$

$$B(\alpha, \alpha^2)$$

$$C \in P \Rightarrow C(\theta, \theta^2)$$

$$1. AB \text{ e } OC \text{ paralelos} \Rightarrow m_{ab} = m_{oc}$$

$$\text{Pontos: } A = (-1, 1); B = (\alpha, \alpha^2); C = (\theta, \theta^2); O = (0, 0)$$

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} = \frac{\theta^2 - 0}{\theta - 0}$$

$$\frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1} = \frac{\theta^2}{\theta}$$

$$\alpha - 1 = \theta$$

$$2. \text{dist}_{b,c} = \sqrt{17}$$

$$\sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{17}$$

$$(\theta - \alpha)^2 + (\theta^2 - \alpha^2)^2 = 17$$

$$(\alpha - 1 - \alpha)^2 + [(\alpha - 1)^2 - \alpha^2]^2 = 17$$

$$(-1)^2 + [\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2] = 17$$

$$1 + (-2\alpha + 1)^2 = 17$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha - 15 = 0$$

$$\Delta = 16 + 240$$

$$\Delta = 256$$

$$\alpha = \frac{4 \pm 16}{8} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{5}{2}; \alpha_2 = -\frac{12}{8}$$

Como $\alpha > 0$, excluimos α_2 . Portanto;

$$B = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4} \right)$$

$$\theta = \alpha - 1$$

$$\theta = \frac{5}{2} - 1$$

$$\boxed{\theta = \frac{3}{2}}$$

Portanto; $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right)$