

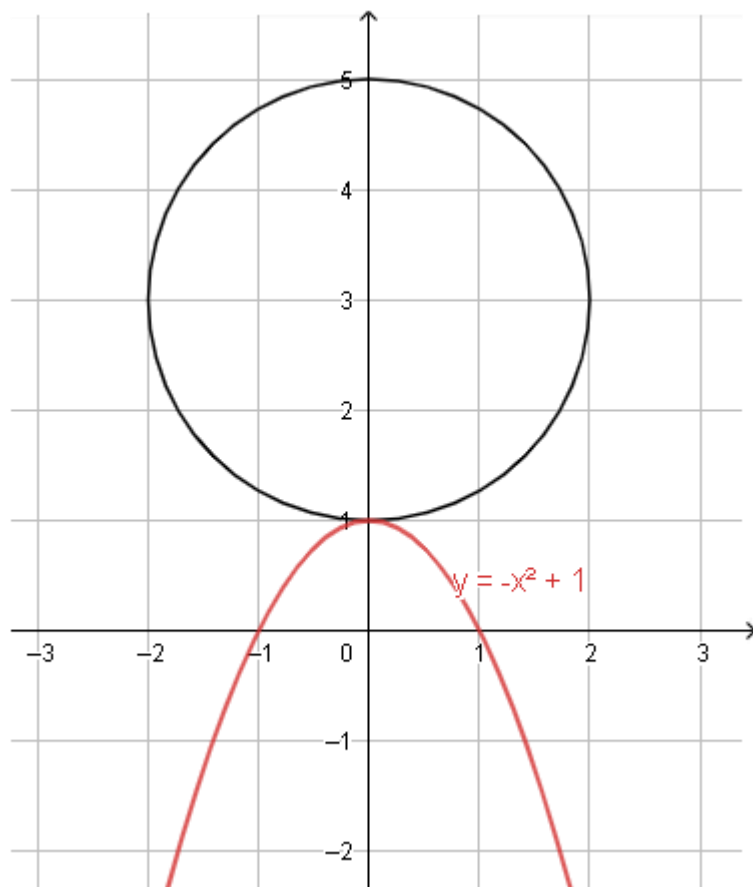
Questão 05

Considere, no plano cartesiano, a circunferência com centro no ponto $(0, 3)$ e com raio 2 e, para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a parábola cuja equação é $y = ax^2 + 1$.

- Para $a = -1$, encontre o ponto comum entre a circunferência e a parábola.
- Para $a = 1$, apresente 3 pontos em comum entre a circunferência e a parábola.
- Encontre todos os valores de a para os quais a circunferência e a parábola possuam exatamente 3 pontos em comum.

RESPOSTAS

- a) Para obter a intersecção, vamos fazer o gráfico:



Logo, o ponto em comum é $(0, 1)$.

- b) Para determinar os pontos, resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y - 1 + (y - 3)^2 - 4 = 0 \\ x^2 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ x^2 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 \text{ ou } y = 4 \\ x^2 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

- $y = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Resposta: $(0, 1); (\sqrt{3}, 4); (-\sqrt{3}, 4)$

c) Por hipótese, o sistema a seguir deve ter 3 soluções distintas.

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ y = ax^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (ax^2 - 2)^2 = 4 \\ y = ax^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Logo,

$$x^2 + a^2x^4 - 4ax^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2(a^2x^2 - 4a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \text{ ou} \\ x = \pm \frac{\sqrt{4a - 1}}{a} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } 4a - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{4}.$$