

Questão M06

A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$, que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}.$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}.$$

- a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?
- b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?
- c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$, encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

RESPOSTA

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é a matriz codificadora e Escola é a mensagem transmitida que é representada pela matriz

$$M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja N a matriz codificadora, obtida através de $N = A \cdot M$, então:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

- b) $N = A \cdot M \Rightarrow A^{-1} \cdot N = A^{-1} \cdot A \cdot M \Rightarrow A^{-1} \cdot N = I \cdot M \Rightarrow M = A^{-1} \cdot N$ (em que A^{-1} é a inversa da matriz A)

Obtenção da matriz inversa de A

Seja $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I \Rightarrow \begin{cases} a + c = 1 & I \\ a + 2c = 0 & II \\ b + d = 0 & III \\ b + 2d = 1 & IV \end{cases}$$

De I e II temos que: $a = 2$ e $c = -1$

De III e IV temos que: $b = -1$ e $d=1$

Portanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é a inversa de A

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

- c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$ e seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a - 7c = 0 \\ 4a - 14c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a - 7c = 0 \Rightarrow a = \frac{7c}{2}$$

e

$$\begin{cases} 2b - 7d = 0 \\ 4b - 14d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b - 7d = 0 \Rightarrow b = \frac{7d}{2}$$

Como a, b, c e d são números inteiros positivos podemos supor valores para c e d, que serão múltiplos de 2, obtendo então esses possíveis valores:

Quando c= 2 e d= 2, então a=7 e b=7 => GGBB

Quando c= 4 e d= 4, então a=14 e b=14 => NNDD

Quando c= 2 e d= 4, então a=7 e b=14 => GNBD

Quando c= 6 e d= 6, então a=21 e b=21 => UUFF

Resposta: 4 possíveis sequências de letras: GGBB, NNDD, GNBD e UUFF