

Questão M05

Conforme se vê na figura, em um plano, encontram-se:

- duas retas perpendiculares r e s e o ponto O de intersecção dessas duas retas;
- um ponto $Q \in s$ tal que a medida de $\overline{OQ}$ é 5;
- uma circunferência c , centrada em Q , de raio 1;
- um ponto $P \in c$ tal que o segmento $\overline{OP}$ intersecta c apenas em P .

Denotam-se $\theta = \angle QOP$ e $\beta = \angle OQP$.

a) Calcule $\sin \theta$, no caso em que θ assume o máximo valor possível na descrição acima.

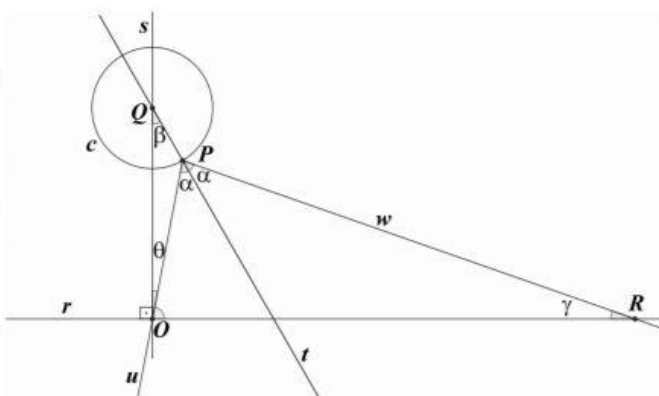
b) Calcule $\sin \theta$, no caso em que $\beta = 60^\circ$.

Ainda na figura, encontram-se:

- a reta t contendo Q e P ;
- a semirreta u partindo de P e contendo O ;
- a semirreta w partindo de P para fora de c de modo que u e w estão em semiplanos distintos relativos a t .

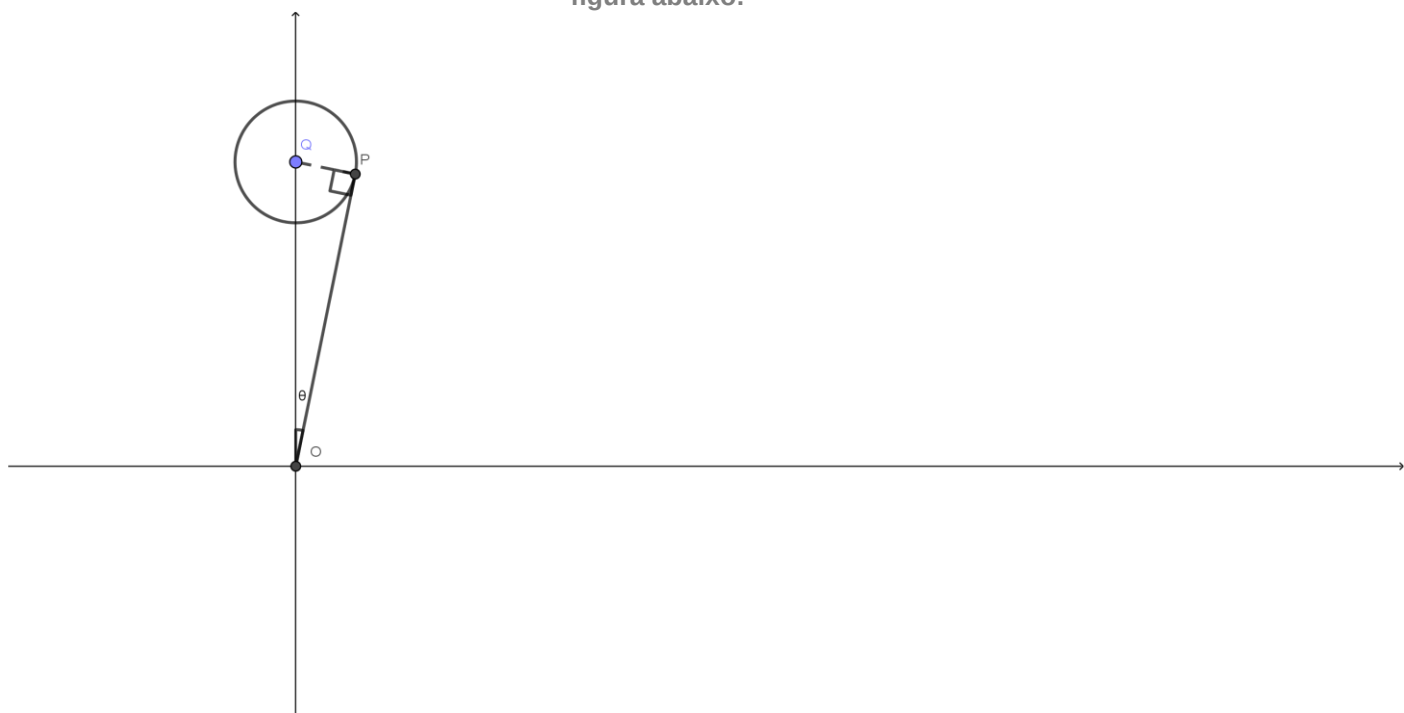
Supõe-se que os ângulos formados por u e t e por w e t sejam iguais a um certo valor α , com $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$. Caso w intersecte r (como é o caso da figura), denotam-se R como esse único ponto de intersecção e $\gamma = \angle ORP$.

c) Determine a medida de $\overline{OR}$, no caso em que $\alpha = 45^\circ$.



RESPOSTA

a) Para que θ seja máximo, o segmento $\overline{OP}$ deve ser tangente à circunferência C em P . Considere a figura abaixo:



Da figura e do enunciado, temos $OQ = 5$, $QP = 1$ e o triângulo OPQ , retângulo em P , assim:

$$\text{Sen}\theta = \frac{QP}{OQ} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Resposta: } \frac{1}{5}$$

b) No triângulo OPQ, aplicando as leis dos cossenos:

$$(OP)^2 = 1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$(OP)^2 = 26 - 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$(OP)^2 = 21$$

$$OP = \sqrt{21}$$

Aplicando, agora, a Lei dos Senos:

$$\frac{QP}{\text{sen } \theta} = \frac{OP}{\text{sen } \beta}$$

$$\frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{\sqrt{21}}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$\frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

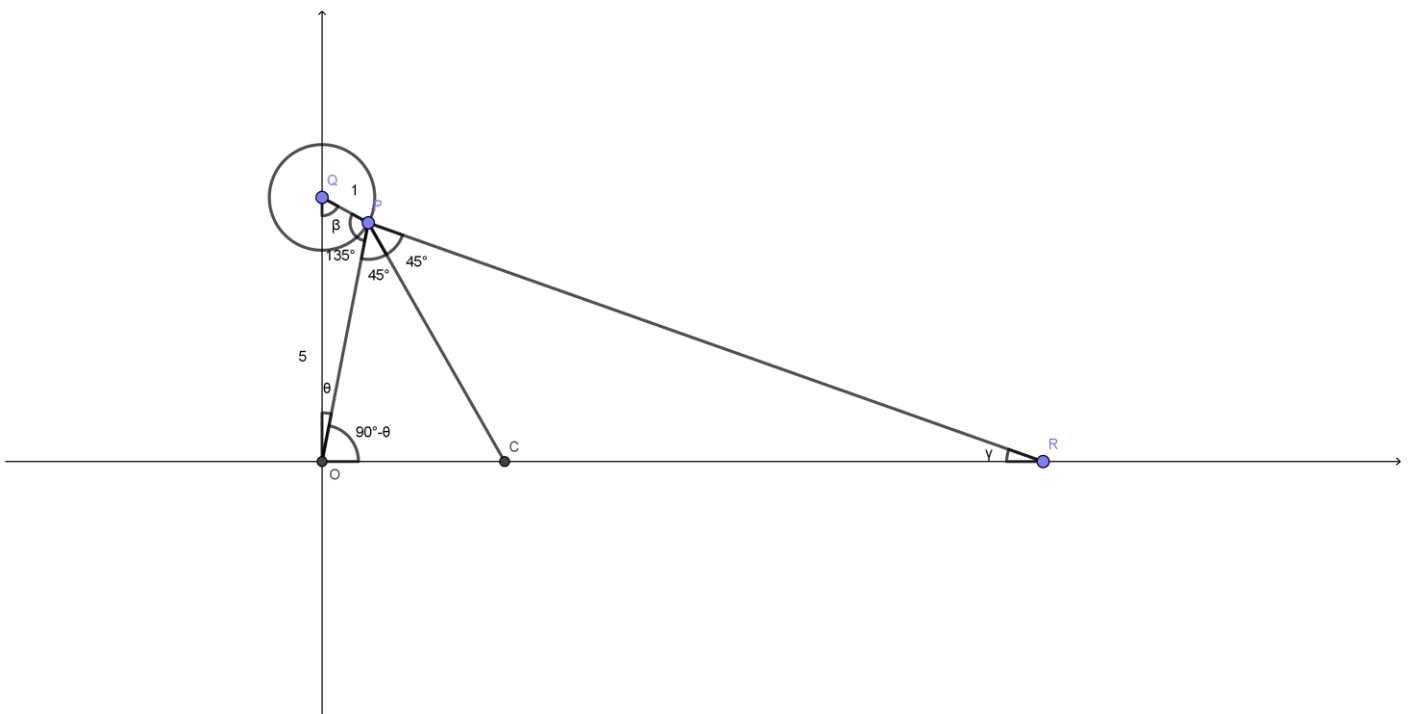
$$\frac{1}{\text{sen } \theta} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

$$\frac{1}{\text{sen } \theta} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

c) De $\alpha = 45^\circ$, considere a figura:



Aplicando a Lei dos Senos e Cossenos nesse triângulo:

$$\frac{1}{\text{sen } \theta} = \frac{5}{\text{sen } 135^\circ} \therefore \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$5^2 = 1^2 + (OP)^2 - 2 \cdot 1 \cdot OP \cdot \cos 135^\circ$$

$$24 = (OP)^2 - 2 \cdot (OP) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(OP)^2 - \sqrt{2} \cdot (OP) - 24 = 0, \text{ com } OP > 0$$

$$OP = -4\sqrt{2} \text{ ou } OP = 3\sqrt{2}$$

$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OR}$, como $\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{OR} \therefore OR = 30$$