

Questão M06

Resolva os três itens abaixo:

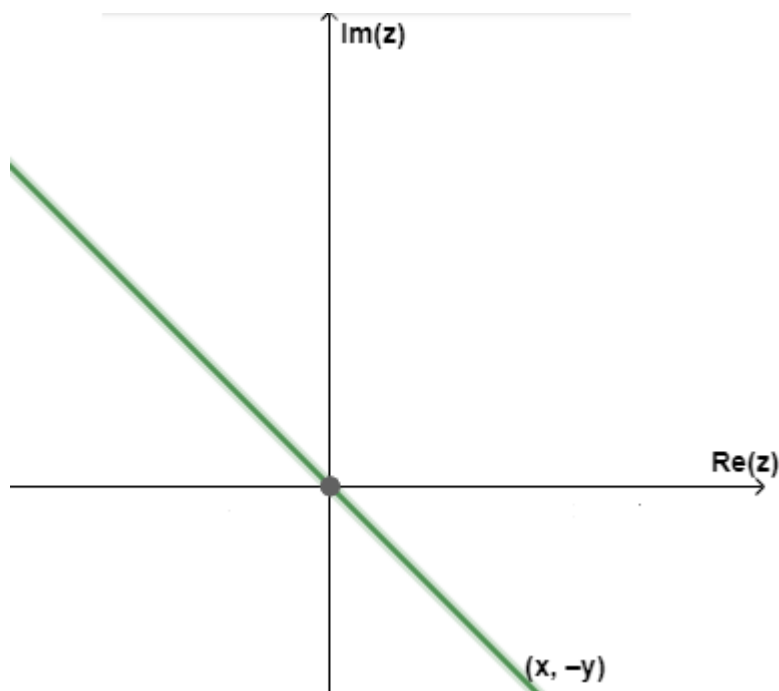
- a) Considere o conjunto formado pelos números complexos z que cumprem a condição $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$. Cada elemento desse conjunto será objeto da transformação que leva um número complexo em seu conjugado. Represente no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss) da folha de respostas o conjunto resultante após essa transformação.
- b) Determine o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo tais que $z \neq -1$ e para os quais $\frac{z-1}{z+1}$ é um número imaginário puro.
- c) Determine as partes reais de todos os números complexos z tais que as representações de z , i e 1 no plano complexo sejam vértices de um triângulo equilátero.

RESPOSTA

a) Considerando $z = x + iy$, identificamos:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z) = x \\ \operatorname{Im}(z) = y \end{array} \right\} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \leftrightarrow x=y, \text{ que é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.}$$

Dividimos a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \bar{z}$, isto é $f(x + iy) = x - iy \leftrightarrow f(x,y) = (x, -y)$, que é a reta bissetriz dos quadrantes pares.



$$\text{b) } z = x + iy \leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

Logo, o conjunto é um imaginário puro se a parte real é zero, isto é:

$$\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2} = 0 \leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \leftrightarrow x^2+y^2=1, \text{ que é uma circunferência de centro } (0,0) \text{ e raio } 1.$$

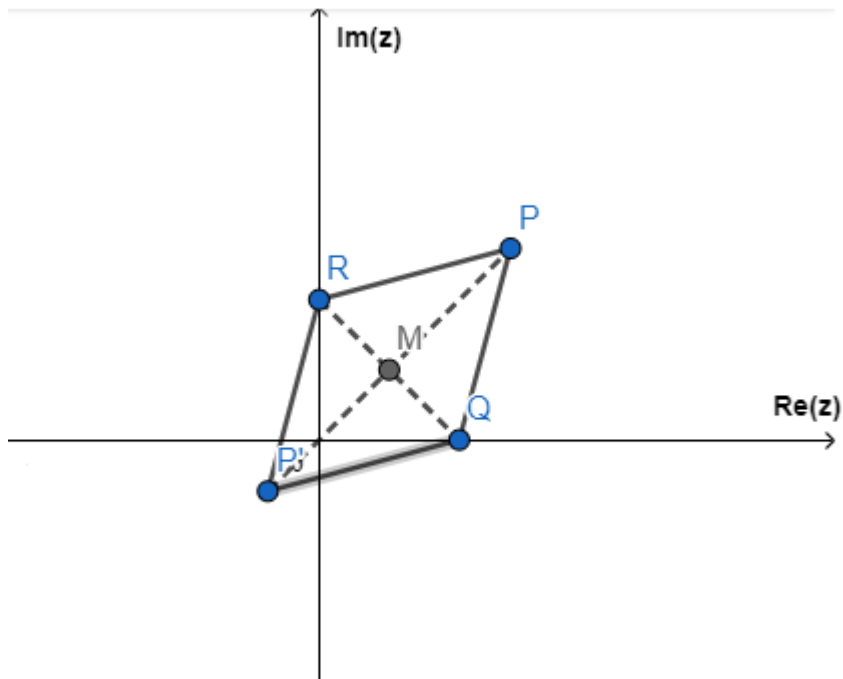
c) No plano complexo, tem-se:

$$z_0 = z = x+iy = P$$

$$z_1 = 1 = 1+0i = (1,0) = Q$$

$$z_2 = i = 0+1i = (0,1) = R$$

Representando no plano, temos:



3) $\text{Re}(P)$ tem duas possibilidades:

$$\text{i) } \text{Re}(P) \times \sqrt{2} = OP = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \text{Re}(P) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = P$$

$$\text{ii) } \text{Re}(P) \times \sqrt{2} = OM - PM = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \text{Re}(P) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = P'$$