

Questão M02

O *Floco de Neve de Koch* (ou *Estrela de Koch*) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	Passo 2: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.
		

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

- Qual é o número de lados da figura no Passo 3?
- Qual é o perímetro da figura no Passo 5?
- A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

Note e adote:

$$\log_{10} 2 \cong 0,301$$

RESPOSTA

- Observando os passos, constatamos que o número de lados das figuras formam uma progressão geométrica de razão 4. Sejam l_1 o número de lados da figura no passo 0 (com $l_1=3$) e n o número do passo, o termo geral é dado por: $l_{n+1} = 3 \cdot 4^n$
Assim, o número de lados quando $n = 3$ é $l_{3+1} = 3 \cdot 4^3 \Rightarrow l_4 = 3 \cdot 64 \Rightarrow l_4 = 192$
Portanto, a figura do passo 3 terá 192 lados.

- Como os lados são divididos em segmentos iguais, o perímetro será obtido pelo produto do número de lados pelo comprimento de cada lado.
O comprimento de cada lado também forma uma PG, com $c_1 = 1$ e razão igual a $1/3$ (pois, a cada passo, os lados são divididos em 3 segmentos iguais).

O termo geral do comprimento é dado por: $c_{n+1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow c_{n+1} = \frac{1}{3^n}$

Assim, o termo geral do perímetro é $p_{n+1} = l_{n+1} \cdot c_{n+1} = 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{3^n} = 4^n \cdot 3^{1-n} \Rightarrow p_{n+1} = \frac{4^n}{3^{n-1}}$

Assim, para $n=5$ (passo 5),

$$p_{5+1} = \frac{4^5}{3^{5-1}} \Rightarrow p_6 = \frac{1024}{81}$$

Ou seja, o perímetro terá medida 1024/81

c) Para que o número de lados da figura supere 6 trilhões, temos que

$$l_{n+1} > 6 * 10^{12} \Rightarrow$$

$$3 * 4^n > 6 * 10^{12} \Rightarrow$$

$$2^{2n} > 2 * 10^{12} \Rightarrow$$

$$\log 2^{2n} > \log 2 + \log 10^{12} \Rightarrow$$

$$2n * 0,301 > 0,301 + 12 \Rightarrow$$

$$n > \frac{12,301}{0,602}$$

$$n > 20,43$$

Assim, a partir do passo 21 (n=21) que isso acontecerá