

Questão 10

Seja $f(x) = x^3 - 2x + 1$ uma função polinomial real. A reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é definida pela equação $y = mx + f(a) - ma$, onde $m = 3a^2 - 2$.

- a) Encontre os pontos do gráfico de $y = f(x)$ cuja reta tangente é paralela à reta definida por $x - y = 0$.
- b) Sabendo que $a > 0$ e que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é 10, determine os pontos de interseção da reta tangente com o gráfico de $y = f(x)$.

RESPOSTA

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

Reta tangente no ponto $(a, f(a))$:

$$y = (3a^2 - 2)x + (-2a^3 + 1)$$

- a) Como a reta tangente é paralela a $y=x$, temos que $m = 1$, ou seja,

$$3a^2 - 2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\text{Para } a = 1, f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow P_1(1, 0)$$

$$\text{Para } a = -1, f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2 \Rightarrow P_2(-1, 2)$$

Logo, os pontos procurados são $(1, 0)$ e $(-1, 2)$.

- b) $m = 10$, ou seja:

$$3a^3 - 2 = 10$$

$$3a^2 = 12$$

$$a = \pm 2$$

Como $a > 0$, temos que $a = 2$.

$$\text{Para } a = 2, y = (3 \cdot 2^2 - 2)x + (-2 \cdot 2^3 + 1)$$

$$y = 10x - 15$$

Pontos de intersecção entre $f(x)$ e $y = 10x - 15$:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x + 1 \\ y = 10x - 15 \end{cases}$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0 = P(x)$$

Verificamos por inspeção que -4 é raiz de $P(x) = 0$, logo $P(x)$ é divisível por $(x + 4)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -12 & 16 \\ & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

Logo, temos que $(x + 4)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$$x = -4 \text{ ou } x^2 - 4x + 4 = 0, \text{ que nos dá } x = 2.$$

Portanto, para $x = -4$, $(-4, -55)$ e para $x = 2$, $(2, 5)$