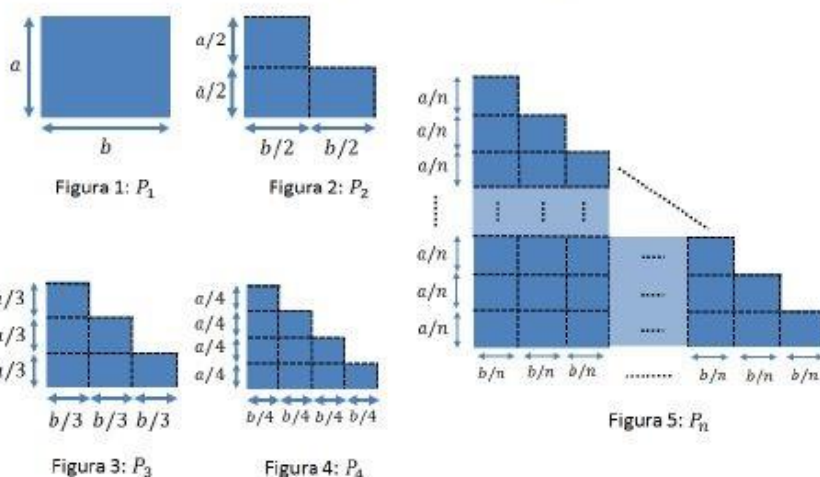


Questão 08

Sejam a, b números reais positivos. Considere a sequência de polígonos $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ construídos da seguinte forma:

- P_1 é um retângulo de lados a e b , como mostra a figura 1;
- P_2 é obtido de P_1 , retirando dele um retângulo de lados medindo $a/2$ e $b/2$, como mostra a figura 2;
- P_3 é obtido de P_1 , retirando dele 3 retângulos de lados medindo $a/3$ e $b/3$, como mostra a figura 3;
- P_4 é obtido de P_1 , retirando dele 6 retângulos de lados medindo $a/4$ e $b/4$, como mostra a figura 4;
- E assim, sucessivamente, P_n é obtido de P_1 , como mostra a figura 5.



- a) Determine o perímetro e o número de lados de P_{2021} .
- b) Seja A_n a área do polígono P_n , e seja A a área do triângulo retângulo de catetos com medidas a e b . Encontre a razão $R_n = \frac{A_n}{A}$, para n arbitrário.

RESPOSTA

a) Figura	Perímetro	Número de Lados
P_1	$2(a + b) = 2a + 2b$	$2 + 1 + 1 = 4$
P_2	$2(2a/2 + 2b/2) = 2a + 2b$	$2 + 2 + 2 = 6$
P_3	$2(3a/3 + 3b/3) = 2a + 2b$	$2 + 3 + 3 = 8$
P_4	$2(4a/4 + 4b/4) = 2a + 2b$	$2 + 4 + 4 = 10$
↓	↓	↓
P_{2021}	$2(2021a/2021 + 2021b/2021) = 2a + 2b$	$2 + 1 + 1 = 4$

O perímetro e o número de lados de P_{2021} , são, respectivamente, $(2a + 2b)$ e 4044.

b) Figura	Área
P_1	$A_1 = 1(a * b) = ab$
P_2	$A_2 = (1 + 2) \left(\frac{a}{2} * \frac{b}{2} \right) = \frac{3ab}{4}$
P_3	$A_3 = (1 + 2 + 3) \left(\frac{a}{3} * \frac{b}{3} \right) = \frac{6ab}{9}$
	
P_n	$A_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \left(\frac{a}{n} * \frac{b}{n} \right) = \frac{(1+n)n*ab}{2n^2}$

Assim, $R_n = \frac{A_n}{A} \Rightarrow R_n = \frac{(1+n)n*ab}{2n^2} * \frac{2}{ab} = \frac{n+1}{n}$