

Questão 07

Considere um número real $t \in [0, 2\pi)$ e defina a matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \cos^2(t) & \cos(t)\sin(t) \\ \cos(t)\sin(t) & \sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

- a) Mostre que a matriz H é invertível.
- b) Determine valores de t tais que $H \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

RESPOSTA

a)

$$H = \begin{bmatrix} 1 - 2\cos^2 t & -2\cos t \cdot \sin t \\ -2\cos t \cdot \sin t & 1 - 2\sin^2 t \end{bmatrix}$$

$$\det(H) = (1 - 2\cos^2 t)(1 - 2\sin^2 t) - 4\cos^2 t \cdot \sin^2 t$$

$$\det(H) = 1 - 2\sin^2 t - 2\cos^2 t + 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t - 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t$$

$$\det(H) = 1 - 2(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$\det(H) = -1$$

Como o $\det(H) \neq 0$, temos que H é inversível.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\cos^2 t & -2\cos t \cdot \sin t \\ -2\cos t \cdot \sin t & 1 - 2\sin^2 t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 6\cos^2 t - 4\cos t \cdot \sin t \\ -6\cos t \cdot \sin t + 2 - 4\sin^2 t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6\cos^2 t - 4\cos t \cdot \sin t = -1 & (x2) \\ -6\cos t \cdot \sin t - 4\sin^2 t = 1 & (x3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12\cos^2 t - 8\cos t \cdot \sin t = -2 \\ -12\sin^2 t - 18\cos t \cdot \sin t = 3 \end{cases} +$$

$$-12(\sin^2 t + \cos^2 t) - 26\cos t \cdot \sin t = 1$$

$$26\cos t \cdot \sin t = -13$$

$$2\cos t \cdot \sin t = -1$$

$$\sin(2t) = -1$$

$$2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{7\pi}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$