

Questão 09

9. Seja a função $f(x) = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$, definida para todo número real x .

a) Mostre que $f(\pi/2) + f(-\pi/2) = f(\pi) f(\pi/4)$.

b) Seja θ um número real tal que $f(\theta) = 2$. Determine os possíveis valores para $\operatorname{sen} \theta$.

RESPOSTA

a)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 + 1}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 + \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 - 1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = \frac{2 + \operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{2 + 0}{2 + (-1)} = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1, \text{ pois } \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Devemos provar que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 = 2 \times 1 = f(\pi) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, demonstramos assim a igualdade.

b) Como $f(\theta) = 2$, temos que $\frac{2 + \operatorname{sen} \theta}{2 + \cos \theta} = 2$.

Daí $2 + \operatorname{sen} \theta = 4 + 2 \cos \theta \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 2 + 2 \cos \theta$.

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = (2 + \cos \theta)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta \Rightarrow 1 - \cos^2 \theta = 4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta \Rightarrow 5 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta + 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \times 5 \times 3 = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2 \times 5} = \frac{-8 \pm 2}{10} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-6}{10} \text{ ou } \cos \theta = -1.$$

No caso em que $\cos \theta = \frac{-6}{10}$, temos que:

$$\left(\frac{-6}{10}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{36}{100} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{64}{100} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{8}{10} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0,8 \text{ ou } \operatorname{sen} \theta = -0,8.$$

No caso em que $\cos \theta = -1$, temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta + (-1)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Verificando a primeira relação:

Para $\operatorname{sen} \theta = 0,8$ e $\cos \theta = -0,6$, temos que $0,8 = 2 + 2(-0,6) \Rightarrow 0,8 = -0,8$, o que é falso, portanto não convém usar esse resultado.

Para $\sin \theta = -0,8$ e $\cos \theta = -0,6$, temos que $-0,8 = 2 + 2(-0,6) \Rightarrow -0,8 = -0,8$, ou seja, a igualdade é verificada.

Para $\sin \theta = 0$ e $\cos \theta = -1$, temos que $0 = 2 + 2(-1) \Rightarrow 0 = 0$, ou seja, a igualdade é verificada.

Assim, os possíveis valores são $\sin \theta = 0$ ou $\sin \theta = -0,8$.