

Questão 24

Considere V sendo o vértice da parábola descrita pela função $g(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e r sendo a reta que passa pelos pontos $A(-2, 2)$ e V .

- a) Determine a medida do ângulo agudo que a reta r forma com o eixo das abscissas.
b) Determine todos os pontos (x, y) , pertencentes ao gráfico de $y = g(x)$, tais que x e y sejam números inteiros positivos.

RESOLUÇÃO

a) Para encontrar o ângulo que a reta r faz com o eixo das abscissas, basta utilizar os pontos A e V para determinar o coeficiente linear de r .

Encontrando o vértice V :

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) \Rightarrow V = \left(\frac{-4}{2 \cdot (-1/2)}, \frac{-16}{4 \cdot (-1/2)} \right)$$

$$V = (4, 8)$$

Calculando o coeficiente linear com os pontos $V = (4, 8)$ e $A = (-2, 2)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \frac{8 - 2}{4 - (-2)}$$

$$m = \frac{6}{6} \Rightarrow m = 1$$

Portanto,

$$\tan^{-1} m = \theta \Rightarrow \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

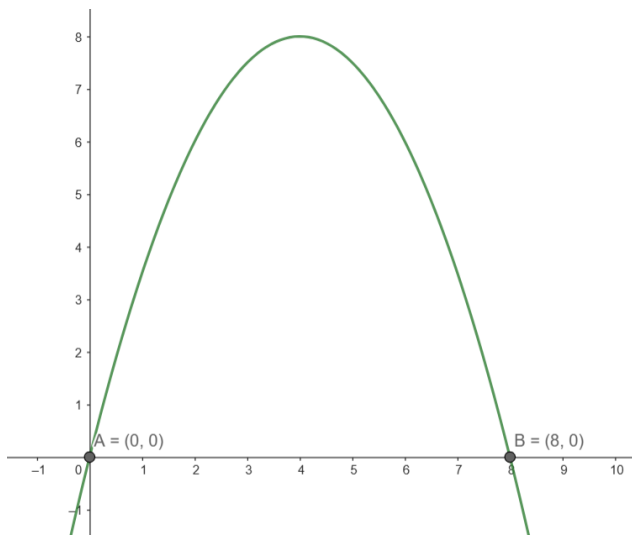
Concluindo que o ângulo agudo formado pela reta r é de 45° .

b) Analisando $g(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$, percebe-se que g é uma parábola côncava para cima com as raízes dadas por:

$$4x - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x(x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 8$$

Ou seja, a função tem o seguinte gráfico:



Onde os únicos valores de x que resultam em valores de y inteiros e positivos se encontram no intervalo $]0,8[$.

Além disso, é necessário que $-\frac{x^2}{2}$ seja inteiro, para isso x deve ser um número par.

Dessa forma, conclui-se que x pode assumir os valores 2, 3 e 6. Logo:

$$g(2) = 4.2 - \frac{2^2}{2} \Rightarrow g(2) = 6$$

$$g(4) = 4.4 - \frac{4^2}{2} \Rightarrow g(4) = 8$$

$$g(6) = 4.6 - \frac{6^2}{2} \Rightarrow g(6) = 6$$

O que resulta nos pontos (2,6), (4,8) e (6,6).