

22.

QUESTÃO 22

Cada um de 30 estudantes de determinada escola obteve, em uma prova de matemática, ou nota 2, ou nota 3, ou nota 4, ou nota 5. Sobre as notas dos estudantes, considere que:

- 1) a soma de todas as trinta notas foi 93;
- 2) a quantidade de notas 3 foi maior do que a de notas 5, e menor do que a de notas 4;
- 3) o número de estudantes que tiraram nota 4 é divisível por 10;
- 4) um número par de estudantes tirou nota 5.

Sejam x , y , z e w os números, não nulos, de estudantes que tiraram notas 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

- a) Apresente argumentos matemáticos que justifiquem que z é diferente de 20.
- b) Determine x , y , z e w .

RESOLUÇÃO

Do enunciado, temos que:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 30 \\ x \cdot 2 + y \cdot 3 + z \cdot 4 + w \cdot 5 = 93 \end{cases}$$

e, além disso, que:

- $w < y < z$;
- z é inteiro positivo e divisível por 10, ou seja, $z \in \{10, 20, 30, 40, \dots\}$;
- w é inteiro positivo e par, ou seja, $w \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

a) Se z fosse 20, teríamos para a soma das notas:

$$x \cdot 2 + y \cdot 3 + 20 \cdot 4 + w \cdot 5 = 93 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5w = 13$$

Porém, como x , y e w são inteiros positivos, e w é par, temos $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $w \geq 2$, de modo que:

$$2x + 3y + 5w \geq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5w \geq 15,$$

ou seja, não teria como essa soma resultar em 13. Assim, z não pode ser 20.

b) Sabemos que $z \in \{10, 20, 30, 40, \dots\}$. Se tivéssemos $z \geq 30$, então teríamos necessariamente $z = 30$ (pois são 30 questões ao todo na prova), e todos teriam tirado nota 4, não havendo notas 2, 3 e 5. Isso contradiz o enunciado, pois as quantidades de notas 2, 3 e 5 também são diferentes de zero. Como provamos no item (b), z também não pode ser 20. Assim, a única opção para z é $z = 10$. Com isso, temos:

$$\begin{cases} x + y + 10 + w = 30 \\ x \cdot 2 + y \cdot 3 + 10 \cdot 4 + w \cdot 5 = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + w = 20 \\ 2x + 3y + 5w = 53 \end{cases}$$

Somando a primeira equação, multiplicada por (-2) , à segunda, vem que:

$$y + 3w = 13 \Leftrightarrow y = 13 - 3w$$

Como $y > 0$, segue que $13 - 3w > 0 \Leftrightarrow w < 4,333 \dots$. Assim, como $w \in \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, ficamos com as opções $w = 2$ ou $w = 4$. Analisamos agora cada uma dessas opções:

(I) $w = 2$:

$$\begin{cases} x + y + 2 = 20 \\ 2x + 3y + 5 \cdot 2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 7 \end{cases}$$

(II) $w = 4$:

$$\begin{cases} x + y + 4 = 20 \\ 2x + 3y + 5 \cdot 4 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$$

Como temos a condição $w < y < z$, descartamos a opção (II), e concluímos que:

$$\boxed{\begin{cases} x = 11 \\ y = 7 \\ z = 10 \\ w = 2 \end{cases}}$$