

Questão 03

Considerando $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$,

- quantas funções $f: A \rightarrow A$ (não necessariamente sobrejetoras) existem?
- quantas são as funções $f: B \rightarrow B$ que satisfazem $f(f(n)) = n$, para todo $n \in B$?
- escolhendo aleatoriamente uma função $f: B \rightarrow B$ bijetora, qual é a probabilidade de f ter ao menos um ponto fixo?

Note e adote:
Dizemos que $n \in B$ é um *ponto fixo* de f se $f(n) = n$.

RESOLUÇÃO

a) A contagem de funções é realizada contando as possíveis imagens de cada elemento do domínio.

Assim, o total de funções de A em A é:

- Total de imagens do elemento 1: 4
- Total de imagens do elemento 2: 4
- Total de imagens do elemento 3: 4
- Total de imagens do elemento 4: 4

Resposta: $4^4 = 256$

b) Vamos considerar os casos onde não temos nenhum ponto fixo, dois pontos fixos, quatro pontos fixos e seis pontos fixos. Note que não é possível ter um número ímpar de pontos fixos uma vez que resultaria em um número ímpar de elementos restantes em B o que inviabilizaria $f(f(n)) = n$. Assim:

1º) Nenhum ponto fixo, ou seja, $n \neq f(n)$: $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{3!} = 15$

2º) Dois pontos fixos, ou seja, dois pares onde $n = f(n)$: $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2!} = 45$

3º) Quatro pontos fixos, ou seja, quatro pares onde $n = f(n)$: $\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 15$

4º) Seis pontos fixos, ou seja, seis pares onde $n = f(n)$: $\binom{6}{6} = 1$

Assim, o total de funções é $15 + 45 + 15 + 1 = 76$.

c) O total de funções bijetoras é o total de funções cujas imagens dos elementos do domínio não podem se repetir. Assim, o total de funções bijetoras é $6! = 720$.

Para determinar a quantidade de funções que possuem, pelo menos, um ponto fixo, façamos a seguinte contagem:

- Exatamente 1 ponto fixo: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{1} \cdot 5! = 720$
- Exatamente 2 pontos fixos: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{2} \cdot 4! = 360$
- Exatamente 3 pontos fixos: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{3} \cdot 3! = 120$

- Exatamente 4 pontos fixos: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{4} \cdot 2! = 30$
- Exatamente 5 pontos fixos: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{5} \cdot 1! = 6$
- Exatamente 6 pontos fixos: escolher o elemento e determinar as outras imagens $= \binom{6}{6} \cdot 0! = 1$

Logo, o total de funções com pelo menos um ponto fixo é, pelo princípio da inclusão-exclusão:

$$720 - 360 + 120 - 30 + 6 - 1 = 455.$$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{455}{720} = \frac{91}{144}$.