

Questão M05

É dada a função $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, para todo $x \in [0, \pi]$.

- Apresente três valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = 1$.
- Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $f(x) = \frac{5}{8}$.
- Determine os valores $x \in [0, \pi]$ para os quais $\frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{8}\sin(2x) \geq \frac{5}{8}$.

RESPOSTA

Reescrevendo $f(x)$, a partir da identidade $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tem-se:

$$\text{i)} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow f(x) + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \quad (I)$$

$$\text{ii)} \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x \quad (II)$$

$$\text{Assim, } f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x *$$

$$\text{a)} \quad f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0, \pi, 2\pi \Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{8}\sin(2x) \geq \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{5}{8} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{8}\sin 2x - \frac{1}{8} \geq 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 \geq 0$$

Considerando $g(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1$, tem-se:

Raízes: $\sin 2x = 1$ ou $\sin 2x = 1/2$

$$\text{Inequação: } g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$$

*Como $x \in [0; \pi]$ nos 3 itens, então $2x \in [0; 2\pi]$